5 幾何

1. 設 P 是 $\triangle ABC$ 內的一點 AP、BP、CP 交對邊分別於 D、E、F。若 $S_{APF} = S_{CPE} = S_{BPD} = 1$。試求 S_{ABC} 的值。

2. 求證：(i) 大邊對大角；(ii) 大角對大邊。

3. 設 D 、E 、F 分別是 $\triangle ABC$ 邊 BC、CA 、AB 上的點，使得 $BD = CE = AF$，且 $\angle BDF = \angle CED = \angle AFE$。證明: $\triangle ABC$ 為正三角形。

4. 設 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，M 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的任一點，求證：$MA^2+MB^2+MC^2 = GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$。(提示：用中線距離公式。)

5. 求證：(i) 設 A_1, A_2, O 為空間的三點，則 $\|\overrightarrow{OA_1}\|+\|\overrightarrow{OA_2}\| \leq \|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\|+\|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\|$。

   (ii) 設 $A_1, \cdots, A_4, O$ 為空間的 5 點，則 $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\|\overrightarrow{OA_i}\| \leq \sum_{1\leq i<j\leq 4}\|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\|$。

6. 設 P 是 $\triangle ABC$ 內的一點，直線 AP、BP、CP 分別交 BC、CA、AB 於點 L、M、N。求證：$AP\cdot BP\cdot CP \geq 8PL\cdot PM\cdot PN$。

7. 設 $\odot O$ 是非等腰三角形 $\triangle ABC$ 的外接圓。A 在 $\odot O$ 的切線交直線 BC 於點 F；B 在 $\odot O$ 的切線交直線 AC 於點 E；C 在 $\odot O$ 的切線交直線 AB 於點 F。求證：(i) $\dfrac{AF}{FB} = \left(\dfrac{FC}{FB}\right)^2$；(ii) D、E、F 三點共線。

8. 在 $\triangle ABC$ 中 E、D 分別在線段 AC、BC 上。設 O 為 AD 與 BE 的交點。求證：$\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABO}}+1 = \dfrac{AC}{AE}+\dfrac{DC}{BD}$。

9. 在 $\triangle ABC$，$\angle B > \angle C$，過 A 的高、角平分線、中線分別交 BC 於 H、L、D。求證：$\angle HAL = \angle DAL$ 當且僅當 $\angle BAC = 90°$。

10. 設 ABC 為等腰三角形且 $AB = AC$。設 D 為 BC 上的一點使得 $BD = 2CD$。設 P 為 AD 上的一點使的 $\angle BAC = \angle BPD$。求證：$\angle BAC = 2\angle DPC$。

11. 設 $ABCD$ 為梯形且 $AB\|CD$。設 P 為 AC 上的一點使得 C 位於 A 與 P 之間。設 X、Y 分別為 AB、CD 的中點。設 PX 交 BC 於點 N，PY 交 AD 於點 M。求證：$MN\|AB$。

12. 三個半徑同為 R 的圓各經過另外兩個的圓心，試求三個圓所圍公共區域的面積。

13. 設 P 是 $\triangle ABC$ 的高線 AD 上的一點，直線 BP 交 AC 於點 E，直線 CP 交 AB 於點 F。求證：AD 平分 $\angle EDF$。

14. 若 a, b, c 分別是 $\triangle ABC$ 的三邊且滿足 $2a = b + c$，求證：$\triangle ABC$ 的內心 I 與重心 G 的連線必平行 BC。

15. 設 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，$AB = AC$ 及 $\angle BAC = 40^\circ$，點 S、T 分別位於邊 AB、CS 交於點 P。求證：$BT = 2PT$。

16. 設 $ABCD$ 為長方形，其中心為 O，且 $\angle DAC = 60^\circ$。$\angle DAC$ 的內角平分線交 CD 於 S。直線 OS 與 AD 交於點 L，直線 BL 、AC 交於點 M。求證：直線 SM 與 CL 平行。

17. 在等腰三角形 ABC，$AB = AC$，$\angle B$ 的內角平分線交 AC 於 B'。若 $BB' + B'A = BC$，試確定這三角形的三個內角。

18. 在地球上的一條同步軌道短處於赤道上方，與地面距離 $22,236$ 哩，及其周期與地球自轉的周期 24 小時相同。如此地面上的衛星接收器的天線無需調節便可隨時接收位處同步軌道的衛星通訊。在一個國際計劃中，要求在這軌道設置 10 個等距的同步衛星。試確定兩個相鄰衛星的距離，並把管案表為形如 $a + b\sqrt{c}$，其中 a, b, c 都是整數，且 c 沒有平方因子。

19. 五邊形 $ABCDE$ 內接於圓內，已知 E 到直線 AB、BC、CD 的距離分別為 a、b、c。試用 a、b、c 來表示點 E 到 AD 的距離。

20. 點 A、B、C、D 順序分別在直線上，過 A、B 分別作平行線 a、b，過 C、D 分別作平行線 c、d，使得這些直線的兩兩交點恰好是某個正方形的四個頂點。求證：這正方形的邊長並不依賴於線段 BC 的長度。

21. $ABCD$ 是四邊形，$AD = DC = CB < AB$ 且 $AB \| CD$。點 E、F 分別位於邊 CD、BC 使得 $\angle ADE = \angle AEF$。求證：(i) $4CF \leq CB$； (ii) 若 $4CF = CB$，則 AE 是 $\angle DAF$ 的平分線。

22. 設 O 為 $ABCD$ 的中心，過 O 且平行 AD 的直線分別交 AB、CD 於 M、N。任一條平行 AB 的直線交 AC 於點 P。求證：$OP^4 + (\frac{MN}{2})^4 = MP^2 \cdot NP^2$。

23. 設 $ABCDE$ 為凸五邊形，使得 $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ 及 $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$。對角線 BD 交 CE 於點 P。求證：AP 平分 CD。

24. 等腰 $\triangle ABC$ 中，$CA=CB$，I 是它的內，點 D 在 BC 上使得 $OD\perp BI$。求證：$ID\|AC$。

25. 在 $\triangle ABC$ 中，O 是外心，三條高 AD、BC、CF 交於點 H，直線 ED 和 AB 交於點 M，FD 與 AC 交於點 N。求證：(i) $OB\perp DF$，$OC\perp DE$； (ii) $OH\perp MN$。

26. $\triangle ABC$ 的內切圓 $\odot I$ 分別切 BC、CA、AB 於點 A_1、B_1、C_1，三角形 ABC 的外接圓 $\odot O$ 的弧 BAC、CBA、ACB 的中點分別為 A_2、B_2、C_2。求證：A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 三線共點。(2000 年國家集訓隊)

27. 已知兩個半徑不相等的圓 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相交於兩點 M、N，且 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 分別與 $\odot O$ 內切於兩點 S、T。求證：$OM\perp MN$ 的充要條件是 S、N、T 三點共線。

28. 設 $ABCD$ 為凸四邊形使得 $AB=AC=BD$。直線 AC、BD 交於點 O。三角形 ABC 與 ADO 的外接圓交於另一點 P，異於 A。直線 AP、BC 交於點 Q。求證：$\angle COQ=\angle DOQ$。

29. 四邊形 ABC 內接於圓，其邊 BC 與 DC 的延長線交於點 P，AD 與 BC 的延長線交於點 Q，過點 Q 作該圓的兩條切線 QE 與 QF，切點分別為 E、F。求證：P、E、F 三點共線。

30. 設 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，設 AI 交 BC 於點 D。求證：$\frac{AI}{ID}=\frac{b+c}{a}$。

31. 證明：(i) $OI^2=R(R-2r)$；(ii) $HI^2=2r^2+4R^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$。

32. 已知 $\odot A$ 與 $\odot B$ 相交於兩點 C、D，延長 AC 交 $\odot B$ 於 E，延長 BC 交 $\odot B$ 於 F。試證：點 C 是 $\triangle DEF$ 的內心。

33. 設 I, O 分別為三角形 ABC 的內心與外心，圓 Γ 與邊 AB, AC 相切分別於點 X, Y，且與 $\odot O$ 相切。求證：I 是 XY 的中點。

34. 三角形 ABC 的內切圓 $\odot L$ 與邊 BC、CA、AB 分別於點 D、E、F。直線 BE、CF 分別交 $\odot L$ 於點 Y、Z。假設直線 FE、BC 經延長後交於點 X。求證：X、Y、Z 三點共線。

35. $\odot A$、$\odot B$ 相交於 C、D，且它們都與 $\odot O$ 內切，切點為 M、N，射線交圓 $\odot O$ 於 P，PM 交 $\odot A$ 於 E，PN 交 $\odot B$ 於 F。求證：EF 是 $\odot A$ 與 $\odot B$ 的公切線。

36. 已知 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 交於點 D 、P，點 A 、B 分別在 $\odot O_1$ 、$\odot O_2$ 上，且 AB 與 $\odot O_1$ 、$\odot O_2$ 均相切，點 D 比 P 更靠近 AB。若 AD 與 $\odot O_2$ 交於另外一點 C ，BC 的中點為 M ，證明: $\angle DPM = \angle BDC$。

37. 已知 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 外切於點 D，又分別與圓 Γ 內切於點 E、F，直線 ℓ 為 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 過點 D 的公切線。設 AB 為垂直於 ℓ 的圓 Γ 的直徑, 滿足 A、E、O_1 在直線 ℓ 的同側。證明：AO_1、BO_2、EF 三線共點。

38. 設 H 是銳角 $\triangle ABC$ 的垂心，M 是邊 BC 的中點，過點 H 作 AM 的垂線，垂足為 P。證明：$AM \cdot PM = BM^2$。

39. 已知 $\triangle ABC$ 滿足 $\angle A = 60^\circ$ ，E 、F 分別為 AB、AC 延長線上的點，且 $BE = CF = BC$，$\triangle ACE$ 的外接圓與 EF 交于不同於 E 的點 K。證明：點 K 在 $\angle BAC$ 的角平分線上。

40. 過銳角 ΔMBC 的頂點 A 、B 作該三角形的外接圓的切線，他們分別與過點 C 的該三角形的外接圓的切線交於點 D 、E ，直線 AE 交 BC 於點 P ，直線 BD 交 AC 於 R。設 Q 為 AP 的中點，S 為 BR 的中點。求證 $\angle ABQ = \angle BAS$。

41. $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 a、b、c，對應的角平分線長分別為 w_a、w_b、w_c，$\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R。證明：$\dfrac{b^2+c^2}{w_a} + \dfrac{c^2+a^2}{w_b} + \dfrac{a^2+b^2}{w_c} > 4R$。

42. 凸六邊形 $ABCDEF$ 中，$AB \| ED$、$BC \| FE$、$CD \| AF$。記 R_A、R_C、R_E 分別為 $\triangle FAB$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$ 的外接圓半徑，p 為六邊形的周長。

43. 在各條邊均不相交且每組對邊均不平行的非凸六邊形 $ABCDEF$ 中，滿足 $\angle A = 3\angle D$ ，$\angle C = 3\angle F$ ，$\angle E = 3\angle B$ ，且 $AB = DE, BC = EF, CD = FA$。證明：對角線 AD 、BE 、CF 三線共點。

44. 已知 P 是四邊形 $ABCD$ 內部一點，點 Q_1 、Q_2 位於四邊形 $ABCD$ 內部，滿足 $\angle Q_1BC = \angle ABP$ ，$\angle Q_1CB = \angle DCP$，$\angle Q_2AD = \angle BAP$ ，$\angle Q_2DA = \angle CDP$。證明：$Q_1Q_2 \| AB$ 當且僅當 $Q_1Q_2 \| CD$。

45. 設 D, E, F 分別為銳角三角形 $\triangle ABC$ 的邊 BC、CA、AB 上的垂足，設直線 EF 交 $\triangle ABC$ 的外接圓於其中一點 P。設 BP 交 DF 於點 Q。求證：$AP = AQ$。

46. (Erdös-Mordell 不等式) 設 P 為三角形 ABC 形內的一點，記 D、E、F 為 P 到邊 BC、CA、AB 的垂足。求證：$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF)$。

47. 設 AD、BE、CF 是銳角三角形 ABC 的高，其中 D, E, F 分別是邊 BC、CA、AB 上。求證：$\triangle DEF$ 的周長不超過 $\triangle ABC$ 的周長的一半。

48. 設 S 為三角形 ABC 的面積，則有 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$；且等號成立當且僅當 $\triangle ABC$ 是等邊。

49. 設 $\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle A = 90^\circ$，P 是斜邊 BC 上的一點。求證：$\dfrac{AB^2}{PC} + \dfrac{AC^2}{PB} \geq \dfrac{BC^3}{PA^2 + PB \cdot PC}$。

50. (Stewart 定理)：設 D 是 $\triangle ABC$ 邊 BC 上的一點，記 $m = AD$、$x = BD$、$y = DC$，則 $AD^2 = \dfrac{c^2 y + b^2 x}{x+y} - xy$。

51. (張角定理) 設 D 是 $\triangle ABC$ 邊 BC 上的一點，記 $m = AD$、$\angle BAD = \beta$ 、$\angle CAD = \gamma$，則 $\dfrac{\sin A}{m} = \dfrac{\sin\beta}{b} + \dfrac{\sin\gamma}{c}$。

52. 設 ABC 的三邊長分別為 a、b、c，D、E 分別為 AC、AB 的中點。求證：$BD \perp CE$ 當且僅當 $b^2 + c^2 = 5a^2$。

53. 設 G 為 ABC 的重心，若 $a + BG = b + AG$ 及 $b + CG = c + BG$，求證：$\triangle ABC$ 是正三角形。

54. 設 $\triangle ABC$ 的三條中線交於點 G。若 $AB + CG = AC + BG$，求證：$\triangle ABC$ 是等腰三角形。

55. 設 ABC 是非等腰三角形，過點 A、B、C 的中線交外接圓分別於 L、M、N。求證：若 $LM = LN$，則 $2BC^2 = AB^2 + AC^2$。(反之亦然。)

56. 設 a、b、c 分別為 $\triangle ABC$ 的三邊邊長，且滿足 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$。試確定 $\triangle ABC$。

57. 設凸四邊形 $ABCD$ 的兩對角線交於 O，求證：$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$ 當且僅當 $AC \perp BD$ 或其中一條對角線被 O 平分。

58. 設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，若 $\angle B \neq 90^\circ$ 且 $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2AC^2$。求證：對角線 BD 的中點位於 AC 上。

59. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，其內切圓 $\odot I$ 切邊 BC、CA、AB 於點 D、E、F，P 弧 EF(不包含點 D 的弧) 上的一點。設線段 BP 交 $\odot I$ 於另一點 Q，直線 EP、EQ 分別交直線 BC 於點 M、N。證明：(i) P、F、B、M 四點共圓；(ii) $\dfrac{EM}{EN} = \dfrac{BD}{BP}$。

60. 設 P 是 (銳角) 三角形 ABC 內的一點，AP、BP、CP 分別交邊 BC、CA、AB 於點 D、E、F。若 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$，求證：$P$ 是 $\triangle ABC$ 的重心。

61. 設 AB、CD 是兩條平行線段，直線 AD、BC 交於點 P。求證：$\triangle ABP$ 與 $\triangle CDP$ 的外接圓相切於點 P。

62. $\triangle ABC$ 的內切圓 $\odot I$ 分別與邊 BC、AC 相切於點 M、N，點 E、F 分別是邊 AB、AC 的中點，點 D 是直線與 BI 的交點。證明：M、N、D 三點共線。

63. 設直線 ℓ 截 $\triangle ABC$ 的三邊 BC、CA、AB 所在直線於 D、E、F 正點，O_1、O_2、O_3 分別是 $\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$ 的外接圓。求證：(i) $\triangle O_1O_2O_3 \sim \triangle ABC$；(ii) $\triangle O_1O_2O_3$ 的垂心 H 位於直線 ℓ 上。

64. 設 G、H 分別是非等腰三角形 ABC 的重心、垂心。證明：過點 A、B 和 C 且分別垂直於 AG、BG、CG 的三條直線所圍成的三角形的重心 M 位於直 GH 上。

65. 設 M 是正三角形 $A_1A_2A_3$ 的中心，N 是所在平面上的任一點，以 MN 為直徑的圓分別交直線 $MA_i(i=1,2,3)$ 於 B_i。求證：$\displaystyle\sum_{i=1}^{3} MB_i^2 = \sum_{i=1}^{3} NB_i^2$。

66. 已知四邊形 $ABCD$ 內接於圓 $\odot O$ ，E 、F 、G 、H 分別為弧 $\widehat{AB}$ 、$\widehat{BC}$ 、$\widehat{CD}$ 、$\widehat{DA}$ 的中點。若 $AC\cdot BD = EG\cdot FH$。證明：AC 、BD 、EG 、FH 四線共點。

67. 設大圓 $\odot O_1$ 與小圓 $\odot O_2$ 內切於點 P，$\odot O_1$ 的弦 AB 切 $\odot O_2$ 於點 C。延長 PC 交 $\odot O_1$ 於點 G，PA、PB 分別交 $\odot O_2$ 於點 E、F，EF 交 PC 於點 D，延長 AD 交 $\odot O_1$ 於 H。求證：(i) G 為 $\widehat{AB}$ 的中點；(ii)G、F、H 三點共線。

68. 在凸邊形 $ABCD$ 中 $\angle ABC = \angle ADC$，E、F、G、H 分別為 AC、BD、AD、CD 的中點。求證：(i) E、F、G、H 四點共圓；(ii) $\angle AEF = \angle ACB - \angle ACD$。

69. 在銳角三角形 ABC 中 $AB = AC$，$\angle ACB$ 的角平分線交 AB 於點 D，過 $\triangle ABC$ 的外心 O 作 CD 的垂線交 AC 於點 E，過點 E 作 AB 的平行線 CD 於點 F。求證：(i) C、E、O、F 四點共圓；(ii) A、O、F 三點共線；(iii) $EA = EF$。

70. 設 $ABCD$ 為梯形使得 $AB \| CD$ 且 $AB + CD = AD$。設 P 為 AD 中的一點使得 $AP = AB,\ PD = CD$。(a) 求證：$\angle BPC = 90^\circ$；(b) Q 是 BC 的中點，R 是線段 AD 與 $\triangle BAQ$ 的外接圓的交點。求證：B、P、R、C 四點共圓。

71. 設 $ABCDE$ 為五邊形，且 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 120^\circ$，求證：$4AC\cdot BD \geq 3AE\cdot ED$。

72. (蝴蝶定理) 設 P 為 $\odot O$ 上弦 MN 的中點，設 AB、CD 為經過 P 的兩條弦，設 AD、BC 分別交弦 MN 於 E、F。求證：$PE = PF$。

73. 設 M 為凸四邊形 ABC 的兩對角線 AC 與 BD 的交點，$\angle ACD$ 的平分線交射線 BA 於點 K。若 $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$，求證：$\angle BKC = \angle CDB$。

74. 已知 ABC 是直角三角形，$\angle C = 90°$。設 M 是 AB 的中點，H 是 C 到 AB 的垂足，P 是三角形 ABC 內的一點使得 $AP = AC$。求證：PM 平分 $\angle BPH$ 當且僅當 $\angle A = 60°$。

75. 設 $ABCD$ 是四邊形，三角形 ABC 的外接圓交邊 CD、DA 分別於點 P、Q，而三角形 CDA 的外接圓交邊 AB、BC 分別於點 R、S。直線 BP、BQ 分別交直線 RS 於 M、N。求證：點 M、N、P、Q 四點共圓。

76. 如圖，四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC 與 BD 相交於點 E，邊 AB、CD 的中垂線相交於點 F，點 M、N 分別為邊 AB、CD 的中點，直線 EF 分別與邊 BC、AD 相交於點 P、Q。若 $MF \cdot CD = NF \cdot AB$ 且 $DQ \cdot BP = AQ \cdot CP$ ，求證：$PQ \perp BC$。

77. 設 I、H 為銳角 $\triangle ABC$ 的內心及垂心，點 B_1、C_1 分別為邊 AC、AB 的中點。已知射線 B_1I、C_1I 對應交 AB、AC 分別於 B_2、C_2。
求證：(i) $AI = 4R\sin(B/2)\sin(C/2)$；(ii) $AB_2 = \frac{2R\sin(B/2)\cos(C/2)}{\sin(A/2)}$。

78. 設 I、H 為銳角 $\triangle ABC$ 的內心及垂心，點 B_1、C_1 分別為邊 AC、AB 的中點。已知射線 B_1I、C_1I 對應交 AB、AC 分別於 B_2、C_2。B_2C_2 交 BC 於 K，A_1 為 $\triangle BHC$ 的外心。求證：A、I、A_1 三點共線當且僅當 $\triangle BKB_2$、$\triangle CKC_2$ 的面積相等。

79. (托勒密定理) 在凸四邊形 $ABCD$ 中，則 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$。

80. (托勒密定理) 在凸四邊形 $ABCD$ 中，則 $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$。
等號成立當且僅當 $ABCD$ 是圓內接。

81. (托勒密定理) 設四邊形 $ABCD$ 是圓內接，則 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$。

82. 設 $ABCDEF$ 為凸六邊形，且 $AB = BC,\ CD = DE,\ EF = FA$。
求證：$\dfrac{BC}{BE} + \dfrac{DE}{DA} + \dfrac{FA}{FC} \geq \dfrac{3}{2}$，並指出等號成立的充要條件。

83. 設 M 為凸四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC、BD 的交點。設 $\angle ACD$ 的角平分線交 BA 於點 K。若 $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$，求證：$\angle BKC = \angle CDB$。

84. 設 P 為凸四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC、BD 的交點，且 $AB = AC = BD$。設 O、I 分別為 $\triangle ABP$ 的外心及內心。求證：若 $I \neq O$，則直線 $OI \perp CD$。

85. 設直線 ℓ 為通過銳角 $\triangle ABC$ 的垂心，求證：ℓ 沿三條線的直線作反射後交於同一點。

86. 設 A', B', C' 分別為三角形 ABC 的外接圓弧 BC, CA, AB 的中點，連結 A', B', C'，過 A' 的邊 $A'B'$、$A'C'$ 交 BC 於 M、N；過 B' 的邊 $B'A'$、$B'C'$ 交 AC 於 P、Q；過 C' 的邊 $C'B'$、$C'A'$ 交 AB 於 R、S。求證：$MN = PQ = RS$ 當且僅當 $\triangle ABC$ 是等邊。

87. 設 $ABCD$ 內接於圓 $\odot O$，對角線 AC、BD 交於點 Q，設 E、F、G、H 分別為 Q 到 AB、BC、CD、DA 的垂足。求證：EH、BD、FG 三線共點。

88. 設 $BCEF$ 內接於圓 $\odot O$，BE、CE 的延長線交於點 A，設 BE、CF 交於點 H。過 A 的兩條直線與 $\odot O$ 分別相切於點 P、Q。求證：P、H、Q 三點共線。

89. 設 D、E、F 分別為從銳角三角形 ABC 重心 G 到邊 BC、CA、AB 的垂足。求證：$\dfrac{4}{27} < \dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leq \dfrac{1}{4}$。

90. 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A = 60^\circ$，設 D、E、F 分別為從銳角三角形 ABC 垂心 H 到邊 BC、CA、AB 的垂足。求 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 的外接圓之比。

91. 設 O、I、I_A、I_B、I_C 分別是 $\triangle ABC$ 的外心、內心、A 旁心、B 旁心、C 旁心。求證：(a) $I_AI_BI_C$ 是銳角三角形；(b) $\triangle I_AI_BI_C$ 外心 O'、I、O 共線。

92. 在 $\triangle ABC$ 中，I_a, I_b, I_c 分別與邊 BC、CA、AB 相切的旁切圓的圓心。設圓 $\odot I_a$ 分別與直線 AB、AC 相切於點 P、Q。PQ 分別交直線 I_aB、I_aC 於點 D、E。設 A_1 為 DC 與 BF 的交點。類似地定義點 B_1 與 C_1。求證：AA_1、BB_1、CC_1 三線共點。

93. 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A < 60^\circ$，X、Y 分別是 AB、AC 上的點使得 $CA + AX = CB + BX = BA + AY = BC + CY$。設 P 為平面上的點使得 PX 與 PY 分別垂直 AB、AC。求證：$\angle BPC < 120^\circ$。

94. 設 $ABCD$ 內接於圓 $\odot O$，設 $\triangle ABO$、$\triangle CDO$ 的兩個外接圓交於 O 及另一點 P，且 P 位於 $\triangle DAO$ 的內部。在 OP、PO 的延長線上分別選取點 Q、R。求證：$\angle QAP = \angle OBR$ 當且僅當 $\angle PDQ = \angle RCO$。

95. 設 I 是 $\triangle ABC$ 的內心，設 D、E 分別為邊 AB、AC 的中點。直線 DE 與 BI 交於點 K；直線 DE 與 CI 交於點 L。求證：$AI + BI + CI > BC + KL$。

96. 試確定 $\triangle ABC$ 滿足 $R(b+c) = a\sqrt{bc}$。

97. 已知一直線把三角形分割為兩個等腰三角形，試確定這個三角形的三個內角。

98. 設 O 為正十邊形 D 的中心，AB 分別為 D 的兩個頂點，設 P 為線段 OB 上的一點使得 $OP^2 = OB \cdot BP$。求證：$OP = AB$。

99. 在等腰三角形 ABC，$AB = AC$。設 D 為邊 BC 上的一點使得 $BC > BD > DC > 0$。設 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 分別為 $\triangle ABD$、$\triangle ADC$ 的外接圓，其中 BB'、CC' 分別是直徑。設 M 是 $B'C'$ 的中點。求證：$\triangle MBC$、$\triangle ABC$ 的面積相等。

100. 兩個圓 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交於點 M、N，點 P、Q 分別在 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 上使得直線 PQ 為 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的外公切線且與 N 較近。求證：$\triangle MNP$、$\triangle MNQ$ 的面積相等。

101. 設 G 為 $\triangle ABC$ 內的一點，AG、BG、CG 分別交對邊於點 D、E、F。設 $\triangle AEB$、$\triangle AFC$ 的外接圓的公共弦所在的直線為 ℓ_a；類似定義 ℓ_b、ℓ_c。證明：ℓ_a、ℓ_b、ℓ_c 三線共點。

102. 設圓 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 交於點 A、B，令 ℓ 為 $\odot_1$ 與 $\odot_2$ 的外共切線，分別相切於 $\odot_1$ 的點 M 與 $\odot_2$ 的點 N。若 $\ell \perp AM$ 且 $MN = 2AM$，求 $\angle NMB$。

103. (歐拉九個點) 在 $\triangle ABC$，設 D、E、F 分別為從銳角三角形 ABC 垂心 H 到邊 BC、CA、AB 的垂足；M、N、P 分別是邊 BC、CA、AB 的中點；X、Y、Z 分別是邊 AH、BH、CH 的中點。求證以上九個點是共圓。這個圓稱之為 $\triangle ABC$ 的九點圓。　提示：考慮不同平行高線的三角形中位線。

104. $\odot O$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓，證明：圓 $\odot O$ 的直徑兩端點對 $\triangle ABC$ 的西姆松線垂直相交，且相交於此三角形的九點圓上。

105. 設 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，A'、B'、C' 分別為 BC、CA、AB 的中點。若 $IA' = IB' = IC'$，求證：$\triangle ABC$ 是等邊。

106. 設 ABC 為三角形且 $AB < BC$，點 E、F 分別為邊 AC、AB 上的點使得 $BF = BC = CE$，且這兩點皆與點 A 位於 BC 的同一側。設 G 為 BE 與 CF 的交點，設點 H、C 為 BG 的同一側，使得 $HG \| AC$ 且 $HG = AF$。求證：$\angle EHG = \angle BAC/2$。

107. 證明：在一個非等邊三角形中，以下兩個命題等價。

(i) 三個內角的度數成等差數列；

(ii) 歐拉九點圓與內切圓的公切線與歐拉線平行。

108. 設 O、I、H 分別為非等腰 $\triangle ABC$ 的外心、內心、垂心。求證：$\angle OIH$ 是鈍角。

109. $\triangle ABC$ 的兩邊 AB、AC 相等，Γ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。若 $\triangle ABC$ 的內切圓 ω 可在 BC 向點 B 滑動。證明：當圓 ω 與 Γ 相切時，它也與邊 BC 上的高相切。

110. 設 $ABCD$ 為凸四邊形，P、Q 為邊 AD、BC 上的點使得 $\frac{AP}{PD}=\frac{BQ}{QC}=\frac{AB}{CD}$。求證：直線 PQ 與直線 AB、CD 分別形成相等的角度。

111. 設 m_a、m_b、m_c 分別為 $\triangle ABC$ 的中線，求證：

(i) m_a、m_b、m_c 是某三角形的三邊長；

(ii) 在 (i) 中的三角形與 $\triangle ABC$ 相似當且僅當 $\triangle ABC$ 的三邊長度之平方組成一個等差數列。

112. 在以 AB 為直徑及以其中點 C 為圓心的半圓，M、N 分別為半圓上的兩點，使得 $MC\perp NC$。$\triangle MNC$ 的外接圓交 AB 於另一點 P。求證：$\frac{|PM-PN|}{PC}$ 是定值，並確定這個值。

113. 設 O、H 分別為 $\triangle ABC$ 的外心及垂心，M 為 AH 的中點。過 M 且垂直 OM 的直線交直線 AB、AC 分別於點 P、Q。求證：$MP=MQ$。

114. 在 $\triangle ABC$，$AB\neq AC$，$\angle A$ 的平分線交 $\triangle ABC$ 的外接圓 $\odot O$ 於另一點 D。以 D 為圓心，CD 為直徑的圓交直線 AC 於另一點 B'。直線 BB' 交 $\odot O$ 於另一點 E。求證：E 是 $\triangle AB'D$ 的垂心。

115. 在銳角三角形 ABC，$\angle A$ 的內角平分線 AL 交 BC 於 L，並交外接圓 $\odot O$ 於 N。設 K、M 分別為 L 到邊 AB、AC 的垂足。求證：$\triangle ABC$ 與四邊形 $AKNM$ 有相等的面積。

116. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，點 P、Q 分別是邊 CA、AB 內的點。圓 $\odot O$ 分別通過線段 BP、CQ、PQ 的三個中點 K、L、M。求證：若 PQ 與 $\odot O$ 相切，則 $OP=OQ$。

117. 考慮三角形 ABC，A_1、B_1、C_1 分別為點 A、B、C 關於直線 BC、CA、AB 的對稱點。試確定 $\triangle ABC$ 的三個內角，使得 $\triangle A_1B_1C_1$ 是等邊。

118. 在銳角三角形 $\triangle ABC$，$\angle A = 20^\circ$，求證：$\triangle ABC$ 是等腰當且僅當 $\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3-3abc} = \min\{b,c\}$，其中 a,b,c 分別為三邊的長度。

119. 在等腰三角形 $\triangle ABC$，$AB = AC$，其內切圓 $\odot I$ 與邊 BC 相切於點 D，直線 AI 交 ABC 的外接圓 $\odot O$ 於 M。DM 交 $\odot O$ 於另一點 P。求證：$\angle API = 90^\circ$。

120. 考慮等腰三角形 ABC 且 $AB = AC$。一個半圓其直徑 EF 位於邊 BC 與邊 AB、AC 分別相切於點 M、N。直線 AE 交半圓於點 P。求證：直線 PF 經過弦 MN 的中點。

121. 在圓內接四邊形 $ABCD$，對角線 AC 與 BD 交於點 P。設 E 與 F 為 P 到直線 AB、CD 的垂足。線段 BF 與 CF 交於點 Q。求證：$PQ \perp EF$。

122. 三角形內接於圓 ω，點 D 是邊 AC 的中點，點 M 位於線段 BD 上使得 $DM = 2BM$。射線 AM 交邊 BC 於點 N。假設 $AM \perp CM$。求證：$ADEF$ 是圓內接當且僅當 AN 平分線段 BC。

123. 設 ABC 為三角形，點 D 為邊 BC 上的一點，設 O_1、O_2 分別為三角形 ABC、ABD 的外心。求證：三角形 BOO_1、COO_2 的外心交於直線 BC 上。

124. $\triangle ABC$ 的外接圓為 ω，ℓ 與 ω 相切於 A。點 B_1 與 C_1 位於 ℓ，使得射線 CA 與 BA 分別平分 $\angle BCB_1$ 與 $\angle CBC_1$。線段 BB_1 與 CC_1 交於點 P。過 P 且平行線段 BC 交邊 AC、AB 分別於點 B_2、C_2。求證：若 P 是 B_2C_2 的中點，則 ABC 是等腰。

125. 設 $ABCD$ 為正方形，點 E、F 分別為邊 CD、DA 上的點使得 $\angle EBF = 45^\circ$。已知 $DE = 12^{34}$，試確定正整數組 (k,m,n) 使得 $AB = k, DF = m$ 及 $EF = n$。

126. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的內角、外角平分線分別交直線 BC 於點 D 與 E。$\triangle ADE$ 的外接圓 Γ_1 交直線 AC 於另一點 F，$\triangle ABF$ 的外接圓 Γ_2 在點 A 的切線交 Γ_1 於點 G。求證：$AF = AG$。