高一組　2016 年姓名：________________ 學校：________________

每小題 5 分

1. 設 a, b 為整數，使得 $S = a^2 + 3b^2$ 是偶，則 $S \equiv$ ____ $\pmod 8$。
2. 設 z 為實數使得方程組 $x + y + z = 5$ 及 $xy + yz + zx = 3$ 有公共的實數解對 (x, y)，則 z 的極大值是 ________。
3. 分解 $x^8 + 4x^2 + 4$ 為兩個四次多項式的積 $=$ __________________________。
4. 若正整數 n 是其數字和的 300 倍，則 $n =$ ________。
5. 從 9 個白球、6 個紅球、4 個黑球中每次取一球且並不放回，每次算所取出各色球的總個數，直到取出 n 個球為止。要求每次這三個數的最大值與最小值相差不超過 1，則 n 至多是 ________。

每小題 10 分

1. n 個互異正整數的四次方總和為 2013，求 n 的極小值。
2. 確定式子 $x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$ 的最小值，其中 $x, y \in \mathbb{R}$；並予以證明。
3. 若從某個三角形 $\triangle$ 的三條高線構成另一個三角形 $\triangle_1$，再以 $\triangle_1$ 的三條高線構成三角形 $\triangle_2$。問：$\triangle$ 與 $\triangle_2$ 有哪些關係，並予以證明。
4. 求證：在任意 39 個連續的正整數中，其中一個的數字和必定是 11 的倍數。

高二/三組　2016 年　姓名：________________ 學校：________________

每小題 5 分

1. 設 a, b 為整數，使得 $S = a^2 + 3b^2$ 是偶，則 $S \equiv$ ____ $\pmod 8$。
2. 若正整數 n 是其數字和的 300 倍，則 $n =$ ________。
3. 分解 $x^8 + 4x^2 + 4$ 為兩個四次多項式的積 $=$ __________________________。
4. 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 為平面上的單位向量且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$。若平面向量 $\mathbf{x}$ 滿足 $(3\mathbf{a} - \mathbf{x}) \cdot (4\mathbf{b} - \mathbf{x}) = 0$，則 $\mathbf{x}$ 的長度 $|\mathbf{x}|$ 的最大值是 ________。
5. 若 y_1, y_2, y_3 為 $y^3 + 3y + 2016 = 0$ 的三個互異根，α 滿足 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$，則 $(y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3)(y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3) =$ ________________。
6. 四邊形 $ABCD$ 的面積 $\le$ ____，若 $AB + CD = 6$ 及 $BC + DA = 8$。

每小題 10 分

1. 令 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$，$n \ge 3$。求證：
$$n(n+1)^{1/n} - n < S_n < n - (n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}。$$
2. 設 $ABCD$ 是正方形，點 P 滿足 $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$，求點 P 的軌跡。
3. 求證：在任意 39 個連續的正整數中，其中一個的數字和必定是 11 的倍數。
4. 展開 $(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n)^2 = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n}$ 為關於 x 的多項式，用 n 來表示和式 $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$。